Grupa A

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno raspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Prvi parcijalni ispit iz predmeta **Matematika**, 07.12.2012.

1. Riješiti matričnu jednačinu $BX = A + I$ ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 6 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Dat je skup $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. Provjeriti da li je skup $\mathcal{B}$ linearno nezavisan. Objasniti zašto je $\mathcal{B}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$? Vektor $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ izraziti kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $\mathcal{B}$ (drugim riječima, odrediti koordinate vektora u u odnosu na bazu $\mathcal{B}$).

3. Bez upotrebe H'Lopitalovog pravila izračunati limese

$$\text{(a)} \lim_{x\to 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{2x^2 - 7x + 3}; \quad \text{(b)} \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2 x}{1 + sin^3 x}.$$

4. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$y = \frac{(x-3)^3}{(x-4)^2}.$$

Grupa B

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno raspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Prvi parcijalni ispit iz predmeta **Matematika**, 07.12.2012.

1. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & x^2+3 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D < 2x$.

2. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 3\ . \end{aligned}$$

3. Bez upotrebe H'Lopitalovog pravila izračunati limese

$$\text{(a)} \lim_{x\to 7} \frac{2x^2 - 13x - 7}{-2x^2 + 11x + 21}; \quad \text{(b)} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - sin^3 x}{cos^2 x}.$$

4. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$y = \frac{lnx}{x}.$$

Grupa C

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno raspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Prvi parcijalni ispit iz predmeta **Matematika**, 07.12.2012.

1. Riješiti matričnu jednačinu $2I + BX = A$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ i $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Dat je skup $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Provjeriti da li je skup $\mathcal{B}$ linearno nezavisan.

Objasniti zašto je $\mathcal{B}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$? Vektor $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ izraziti kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $\mathcal{B}$ (drugim riječima, odrediti koordinate vektora u u odnosu na bazu $\mathcal{B}$).

3. Bez upotrebe H'Lopitalovog pravila izračunati limese

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1} \frac{5x^2 - 3x - 2}{7x^2 - 10x + 3}; \quad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{1 - cos^3 x}{sin^2 x}.$$

4. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$y = \frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}.$$

Grupa D

Ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku zadatka. Obavezno obratiti pažnju na **matematičku kulturu** i **matematičku pismenost** pri rješavanju zadataka: ne ostavljati izraze da "vise" u zraku, svaki korak u računu detaljno raspisati, riječima objasniti šta ste našli, šta je konačno rješenje i slično...

Prvi parcijalni ispit iz predmeta **Matematika**, 07.12.2012.

1. Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & -6 & x^2 - 3 \end{vmatrix}$, a zatim riješiti nejednačinu $D < 2x$.

2. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 20 \\ -3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= -27 \end{aligned}.$$

3. Bez upotrebe H'Lopitalovog pravila izračunati limese

$$\text{(a)} \lim_{x\to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}; \quad \text{(b)} \lim_{x\to \pi} \frac{sin^2 x}{1 + cos^3 x}.$$

4. Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije

$$y = \frac{1 + lnx}{x^2}.$$

(#) Riješiti matričnu jednačinu $BX = A + I$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 6 & 9 & -1 \end{bmatrix} \quad i \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rj.-upute:

$BX = A + I \quad / \cdot B^{-1}$ sa lijeve strane

$$X = B^{-1}(A + I)$$

$$\det(B) = 4$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} B_{kof}^{T} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 20 & -6 & -2 \\ -14 & 4 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = B^{-1}(A+I) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 20 & -6 & -2 \\ -14 & 4 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 18 & 54 & -16 \\ -12 & -38 & 12 \\ -4 & -18 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -4 \\ -3 & -\frac{19}{2} & 3 \\ -1 & -\frac{9}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

traženo rješenje

(#) Dat je skup $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}3\\-6\\-9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-5\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$. Provjeriti da li je skup $\mathcal{B}$ linearno nezavisan. Da li je $\mathcal{B}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Zašto? Vektor $u=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ izraziti kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $\mathcal{B}$ (drugim riječima odrediti koordinate vektora $u=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$).

Rj.-upute:

Skup $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan akko jedino rješenje sistema

$$\alpha\begin{pmatrix}3\\-6\\-9\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-5\\-6\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ po nepoznatim α,β i γ

je trivijalno rješenje $\alpha=\beta=\gamma=0$.

$$\begin{aligned}3\alpha+2\beta-\gamma&=0\\-6\alpha+(-5)\beta+\gamma&=0\\-9\alpha-6\beta+5\gamma&=0\end{aligned}$$

ovo je homogeni sistem (uvijek ima jedno rješenje)

$$D=\begin{vmatrix}3&2&-1\\-6&-5&1\\-9&-6&5\end{vmatrix}=-6\neq0$$

$D\neq0$ skup $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan

$\mathcal{B}$ jest baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ zato što bilo koja tri linearno nezavisna vektora formiraju bazu od $\mathbb{R}^3$.

(skup)

Koordinate vektora u u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ su $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, drugim riječima

$$u=2\begin{pmatrix}3\\-6\\-9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\-5\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}.$$

(#) Bez upotrebe H'Lopitalovog pravila izračunati limese a) $\lim_{x \to 3} \frac{3x^2-10x+3}{2x^2-7x+3}$;

b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$.

Rj.-upute:

a)

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{3x^2-10x+3}{2x^2-7x+3} = \lim_{x \to 3} \frac{3\cancel{(x-3)}(x-\frac{1}{3})}{2(x-\frac{1}{2})\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3} \frac{3x-1}{2x-1} = \frac{8}{5}$$

b)

$$\cos^2 x = 1-\sin^2 x = (1-\sin x)(1+\sin x)$$

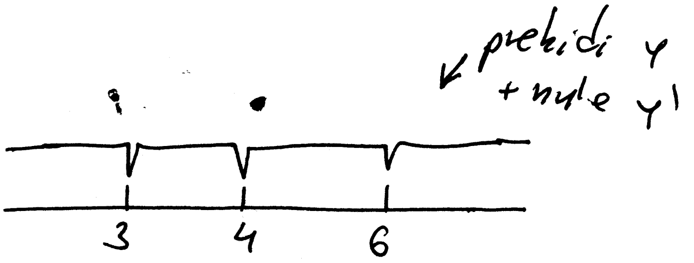
$$1+\sin^3 x = (1+\sin x)(1-\sin x+\sin^2 x)$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x} = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)\cancel{(1+\sin x)}}{\cancel{(1+\sin x)}(1-\sin x+\sin^2 x)} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)+1} = \frac{2}{3}$$

Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y = \frac{(x-3)^3}{(x-4)^2}$.

Rj.-upute:

$$y' = \frac{(x-3)^2(x-6)}{(x-4)^3}$$



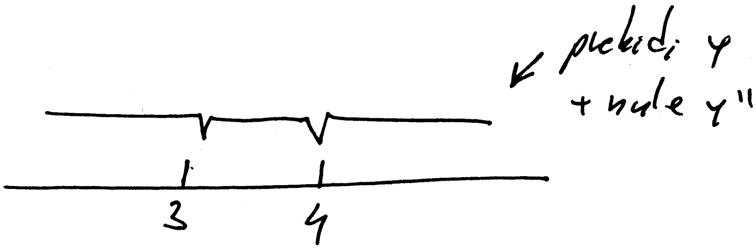
x	$(-\infty, 3)$	$(3, 4)$	$(4, 6)$	$(6, +\infty)$
y'	+	+	−	+
y	↗	↗	↘	↗

tabela rasta i opadanja

MIN

$$MIN\left(6, \frac{27}{4}\right)$$

$$y'' = 6\,\frac{x-3}{(x-4)^4}$$



x	$(-\infty, 3)$	$(3, 4)$	$(4, +\infty)$
y''	−	+	+
y	∩	∪	∪

tabela konveksnosti i konkavnosti

P.T.

P.T.$(3, 0)$

(#) Izračunati determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & x^2-3 \end{vmatrix}$,

a zatim riješiti nejednačinu $D < 2x$.

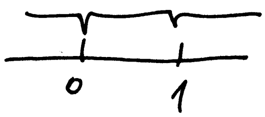
Rj.-upute:

$$D = 2x^2$$

$$2x^2 < 2x$$

$$2x^2 - 2x < 0$$

$$2x(x-1) < 0$$



	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Rješenje nejednačine su svi $x \in (0, 1)$.

(#) Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4+x_5&=0\\ -x_1+3x_2-3x_3-3x_4-3x_5&=-2\\ 3x_1-6x_2+4x_3+4x_4+4x_5&=3. \end{aligned}$$

Rj. - uputa:

Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A}=[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -3 & -3 & -3 & -2\\ 3 & -6 & 4 & 4 & 4 & 3\end{array}\right]\sim\ldots\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3\end{array}\right]$$

$\operatorname{rang}\bar{A}=\operatorname{rang}A=3<5=$ broj nepoznatih

Prema Kroneker-Kapelijevoj metodi sistem ima ∞ mnogo rješenja i dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. prema dobijenom rezultatu $x_4=s$, $x_5=t$.

$x_1=5$, $x_2=4$, $x_3=3-s-t$, $x_4=s$, $x_5=t$.

(#) Bez upotrebe H'Lopitalovog pravila izračunati limese a) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{2x^2-13x-7}{-2x^2+11x+21}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

Rj.-upute:

a)

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$2x^2-13x-7 = 2(x-7)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$-2x^2+11x+21 = (-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-7)$$

$$\lim_{x\to 7} \frac{2x^2-13x-7}{-2x^2+11x+21} = \lim_{x\to 7} \frac{2\cancel{(x-7)}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)\cancel{(x-7)}} = \lim_{x\to 7} \frac{2x+1}{-2x-3} = \frac{15}{-17}$$

b)

$$1-\sin^3 x = (1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)$$

$$\cos^2 x = 1-\sin^2 x = (1-\sin x)(1+\sin x)$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x+\sin^2 x)}{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

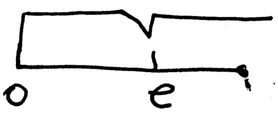
Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y=\frac{\ln x}{x}$.

Rj. -upute:

D.p. $x>0$

$x\in(0,+\infty)$

$y'=0$ akko $x=e$



prekidi y + nule y'

$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

x	$(0,e)$	$(e,+\infty)$
y'	$+$	$-$
y	$\nearrow$	$\searrow$

MAX

tabela rasta i opadanja

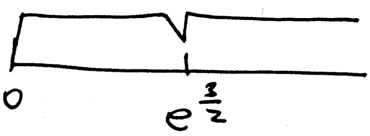
$$\text{MAX}\left(e,\frac{1}{e}\right)$$

$$y''=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$y''=0$ akko $-3+2\ln x=0$

$2\ln x=3$

$x=e^{\frac{3}{2}}$



prekidi y + nule y''

x	$(0,e^{\frac{3}{2}})$	$(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

P.T.

tabela konveksnosti i konkavnosti

$$\text{P.T.}\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$$

7) Riješiti matričnu jednačinu $2I + BX = A$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad i \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rj.-upute:

- $2I + BX = A$

$$BX = A - 2I \quad / \cdot B^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

$$X = B^{-1}(A - 2I)$$

$$\det(B) = 1$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B_{kof}^{T} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = B^{-1}(A - 2I) = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -10 & 9 \\ -5 & 9 & -7 \\ -3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$ traženo rješenje

(#) Dat je skup $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}3\\-9\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-7\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Provjeriti da li je skup $\mathcal{B}$ linearno nezavisan. Objasniti zašto je $\mathcal{B}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Vektor $u=\begin{pmatrix}3\\-4\\4\end{pmatrix}$ izraziti kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $\mathcal{B}$ (drugim riječima odrediti koordinate vektora $u=\begin{pmatrix}3\\-4\\4\end{pmatrix}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$).

Rj.-upute:

Skup $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan akko jedino rješenje sistema

$$\alpha\begin{pmatrix}3\\-9\\6\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-7\\4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

po nepoznatim α,β i γ, je trivijalno rješenje $\alpha=\beta=\gamma=0$.

$$\underbrace{\begin{aligned}3\alpha+2\beta+\gamma&=0\\-9\alpha-7\beta-\gamma&=0\\6\alpha+4\beta+\gamma&=0\end{aligned}}_{\text{homogeni sistem}} \qquad D=\begin{vmatrix}3&2&1\\-9&-7&-1\\6&4&1\end{vmatrix}=3$$

Skup od Bilo koja tri linearno nezavisna vektora formiraju bazu za $\mathbb{R}^3$ pa je $\mathcal{B}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Koordinate vektora $u=\begin{pmatrix}3\\-4\\4\end{pmatrix}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ su $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, drugim riječima

$$u=\begin{pmatrix}3\\-9\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-7\\4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

(#) Bez upotrebe L'Hopitalovog pravila izračunati limese

a) $\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-3x-2}{7x^2-10x+3}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{\sin^2 x}$.

Rj.-upute:

a) $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-3x-2}{7x^2-10x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{5\cancel{(x-1)}(x+\frac{2}{5})}{7(x-\frac{3}{7})\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{5x+2}{7x-3} = \frac{7}{4}$$

b)

$$1-\cos^3 x = (1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)$$

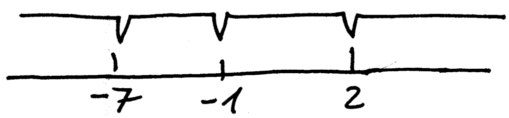
$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x+\cos^2 x)}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y=\frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}$.

Rj.-upute:

$$y'=\frac{(x-2)^2(x+7)}{(x+1)^3}$$



prekidi y + nule y'

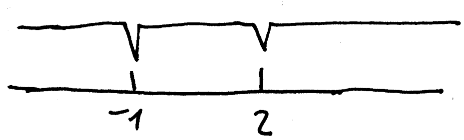
x	$(-\infty,-7)$	$(-7,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
y'	+	−	+	+
y	↗	↘	↗	↗

MAX

tabela rasta i opadanja

$$\text{MAX}\left(-7,-\frac{81}{4}\right)$$

$$y''=54\,\frac{x-2}{(x+1)^4}$$



prekidi y + nule y''

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
y''	−	−	+
y	∩	∩	∪

P.T.

tabela konveksnosti i konkavnosti

$$P.T.(2,0)$$

(#) Izračunati determinantu

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & -6 & x^2-3 \end{vmatrix},$$

a zatim riješiti nejednačinu $D>6x$.

R: -upute:

$D=2x^2$

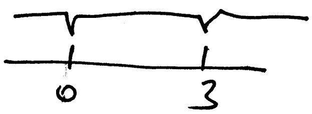
$D>6x$

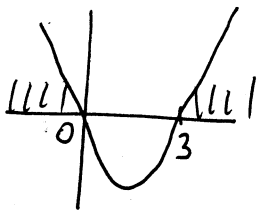
$2x^2>6x \quad /:2$

$x^2>3x$

$x^2-3x>0$

$x(x-3)>0$





Rješenje nejednačine su svi $x\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$.

(#) Riješiti sistem jednačina

$$x_1+2x_2-x_3-x_4-x_5=10$$
$$x_1+3x_2+x_3+x_4+x_5=20$$
$$-3x_1-6x_2+4x_3+4x_4+4x_5=-27$$

Rj-uputa:

Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A}=[A|b]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ -3 & -6 & 4 & 4 & 4 & -27 \end{array}\right] \sim \ldots \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(\bar{A})=3<5=\text{broj nepoznatih}$$

Prema Kroneker-Kapelijevoj metodi sistem ima ∞ mnogo rješenja i dvije promjenjive uzimamo proizvoljno.

$$x_1=5,\ x_2=4,\ x_3=3-s-t,\ x_4=t,\ x_5=s.$$

Bez upotrebe H'Lopitalovog pravila izračunati limese

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$;

b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

Rj.-upute:

a)

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$2x^2-11x+5 = 2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$3x^2-14x-5 = 3(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{2x-1}{3x+1} = \frac{9}{16}$$

b)

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$$

$$1+\cos^3 x = (1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x} = \lim_{x\to\pi}\frac{(1-\cos x)\cancel{(1+\cos x)}}{\cancel{(1+\cos x)}(1-\cos x+\cos^2 x)} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)+1} = \frac{2}{3}$$

Odrediti ekstreme, prevojne tačke te intervale konveksnosti i konkavnosti f-je $y=\frac{1+\ln x}{x^2}$.

Rj. -uputa:

D.p. $x>0$

$x\in(0,+\infty)$

$y'=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$

$y'=0$ akko $2\ln x=-1$

$\ln x=-\frac{1}{2}$

$x=e^{-\frac{1}{2}}$

$0 \quad e^{-\frac{1}{2}}$ ← prekidi y + nule y'

$f(e^{-\frac{1}{2}})=\frac{1-\frac{1}{2}}{(e^{-\frac{1}{2}})^2}$

x	$(0,e^{-\frac{1}{2}})$	$(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$
y'	$+$	$-$
y	$\nearrow$	$\searrow$

MAX

tabela rasta i opadanja

$e^{-\frac{7}{2}}\in(0,e^{-\frac{1}{2}})$

$e\in(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$

$e^{-\frac{7}{2}}<e^{-\frac{1}{2}}<e$

$MAX\left(e^{-\frac{1}{2}},\frac{1}{2}e\right)$

$y''=\frac{1+6\ln x}{x^4}$

$y''=0$ akko $6\ln x=-1$

$\ln x=-\frac{1}{6}$

$x=e^{-\frac{1}{6}}$

$0 \quad e^{-\frac{1}{6}}$ ← prekidi y + nule y''

$e^{-1}<e^{-\frac{1}{6}}<e$

x	$(0,e^{-\frac{1}{6}})$	$(e^{-\frac{1}{6}},+\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

P.T.

intervali konveksnosti i konkavnosti

$f(e^{-\frac{1}{6}})=\frac{1-\frac{1}{6}}{e^{-\frac{1}{3}}}$

$P.T.\left(e^{-\frac{1}{6}},\frac{5}{6}\sqrt[3]{e}\right)$